APRIL/MAY 2023

CMA53 — COMPLEX ANALYSIS — I

Time : Three hours Maximum : 75 marks

Shanmuga Industries Arts and Science College Library
Tiruvannamalai.
Pin: 606 603.

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Find the modulus of $\frac{2+i}{4i+(1+i)^2}$.

   $\frac{2+i}{4i+(1+i)^2}$ இன் குணகத்தை கண்டறியவும்.

2. Evaluate $\lim\limits_{z \to 1 \to i} [x+i(2x+y)]$.

   $\lim\limits_{z \to 1 \to i} [x+i(2x+y)]$ மதிப்பிடுக.

3. Write C.R. equations in polar form.

   C.R. சமன்பாடுகளை போலார் வடிவில் எழுதுங்கள்.

4. Prove that $f(z)=e^x(\cos y - i\sin y)$ is nowhere differentiable.

   $f(z)=e^x(\cos y - i\sin y)$ -ஐ எங்கும் வேறுபடுத்த முடியாது என நிரூபி.

4412

5. Prove that the real and imaginary parts of an analytic function are harmonic functions.

ஒரு பகுப்பாய்வு செயல்பாட்டின் உண்மையான மற்றும் கற்பனை பகுதிகள் ஹார்மோனிக் செயல்பாடுகள் என்பதை நிரூபிக்கவும்.

6. Prove that the function is harmonic $u=3x^2y+2x^2-y^3-2y^2$.

$u=3x^2y+2x^2-y^3-2y^2$ செயல்பாடு ஹார்மோனிக் என்பத்தை நிரூபிக்கவும்.

7. What is bilinear transformation?

இருமுனை மாற்றம் என்றால் என்ன?

8. Find the invariant points of the transformations $w=\dfrac{1}{z-2i}$.

$w=\dfrac{1}{z-2i}$ மாற்றங்களின் மாறாத புள்ளிகளைக் கண்டறியவும்.

9. State Cauchy's integral formula.

Cauchy's-ன் தொகைக்கெழு சூத்திரம்-வரையறு.

10. Evaluate $\int_e \dfrac{dz}{z-3}$ where C is the circle $|z|=1$.

$\int_e \dfrac{dz}{z-3}$ மதிப்பீடு, C என்பது வட்டம் $|z|=1$.

---

18. Find the analytic function $f(z)=u+iv$ given that $u-v=e^x(\cos y-\sin y)$.

$u-v=e^x(\cos y-\sin y)$ எனில், $f(z)=u+iv$-ன் பகுப்பாய்வு செயல்பாட்டைக் கண்டறியவும்.

19. Find the bilinear transformation which maps the points $z_1=2, z_2=i, z_3=-2$, onto $w_1=1, w_2=i, w_3=-1$ respectively.

$z_1=2, z_2=i, z_3=-2$, முறையே $w_1=1, w_2=i, w_3=-1$ எனில் இருமுனை மாற்றத்தைக் கண்டறியவும்.

20. (a) Evaluate $\int_c \dfrac{\sin 2z\,dz}{(2-\pi i/4)^4}$ where C is the circle $|z|=1$.

(b) Evaluate $\int_c \dfrac{e^{2x}}{(z+1)^4}\,dz$ where C is the circle $|z|=2$.

(அ) $\int_c \dfrac{\sin 2z\,dz}{(2-\pi i/4)^4}$-ஐ மதிப்பீடு, C என்பது வட்டம் $|z|=1$

(ஆ) $\int_c \dfrac{e^{2x}}{(z+1)^4}\,dz$-ஐ மதிப்பீடு, C என்பது வட்டம் $|z|=2$.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. (a) Find the Cartesian form of the equation. $|z-4i|^2+|z+4i|^2=34$.

(b) If z is a complex number such that $z\overline{z}=1$ compute $|1+z|^2+|1-z|^2$.

(அ) $|z-4i|^2+|z+4i|^2=34$ என்ற சமன்பாட்டின் கார்டீசியன் வடிவத்தை கண்டறியவும்.

(ஆ) Z என்பது ஒரு சிக்கலான எண்ணாக இருந்தால், $|1+z|^2+|1-z|^2$ ஐ கணக்கிடு.

17. (a) If $f(z)$ and $\overline{f(z)}$ are analytic in D show that $f(z)$ is constant in that region.

(b) Prove that the functions $f(z)$ and $\overline{f(z)}$ are simultaneously analytic.

(அ) $f(z)$ மற்றும் $\overline{f(z)}$ D-ல் பகுப்பாய்வு எனில் அது நிலையானது என நிரூபிக்கவும்.

(ஆ) $f(z)$ மற்றும் $\overline{f(z)}$ ஒரே நேரத்தில் பகுப்பாய்வு என நிரூபிக்கவும்.

(Co-Ed) Library
Tiruvannamalai.
Pin: 606 603.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL the questions.

11. (a) Express each of the following functions in the form $u(x, y)+iv(x,y)$

(i) $w=2_z^{-2}+1$

(ii) $w=z+\frac{1}{z}$.

பின்வரும் ஒவ்வொரு செயல்பாடுகளையும் $u(x, y)+iv(x,y)$ வடிவத்தில் வெளிப்படுத்தவும்

(i) $w=2_z^{-2}+1$

(ii) $w=z+\frac{1}{z}$.

Or

(b) Evaluate $\lim_{z\to -i}\frac{\overline{z}+z^2}{1-\overline{z}}$.

மதிப்பிடுக $\lim_{z\to -i}\frac{\overline{z}+z^2}{1-\overline{z}}$.

12. (a) Prove that any analytic function $f(z)=u+iv$ with arg $f(z)$ constant is itself a constant function.

எந்த $f(z)=u+iv$ பகுப்பாய்வு செயல்பாடும் arg $f(z)$ ஒரு மாறிலி எனில் $f(z)$-ம் ஒரு மாறிலி சமன்பாடு என நிரூபி.

Or

(b) Test whether the following function is analytic $e^x(\cos y - i\sin y)$.

பின்வரும் செயல்பாடு பகுப்பாய்வு உள்ளதா என சோதிக்கவும் $e^x(\cos y - i\sin y)$.

13. (a) If $f(z)$ is analytic prove that $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$.

$f(z)$ என்பது பகுப்பாய்வு எனில் $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$ -ஐ நிரூபிக்கவும்.

Or

(b) Find the function $f(z)=u+iv$ such that $f(z)$ is analytic given that $u=\cos x\cosh y$.

$f(z)$ என்பது பகுப்பாய்வு எனில் கொடுக்கப்பட்ட $u=\cos x\cosh y$ -ன் $f(z)=u+iv$ என்ற செயல்பாட்டைக் கண்டறியவும்.

14. (a) Find the points where $w=z+\frac{1}{z}$ is conformal. Also find the critical points if any.

$w=z+\frac{1}{z}$ இணக்கமாக இருக்கும் புள்ளிகளைக் கண்டறியவும். மேலும் முக்கியமான புள்ளிகள் இருந்தால் கண்டுபிடிக்கவும்.

Or

Arts and Science College (Co-Ed.) Library ★ Tiruvannamalai. Pin: 606 603.

(b) Under the transformation $w=iz+i$ show that the half plane $x>0$ maps onto the half plane $v>1$.

$w=iz+i$ என்ற உருமாற்றத்தில் $x>0$ என்ற அரை தளம் $v>1$ என மாறும் என்பதைக் காட்டுங்கள்.

15. (a) Evaluate $\int_c |z|\bar{z}\,dz$ where C is the closed curve consisting of the upper semicircle $|z|=1$ and the segment $-1\le x\le 1$.

$\int_c |z|\bar{z}\,dz$ -ஐ மதிப்பீடு, C என்பது அரைவட்டம் $|z|=1$ -ன் மேல் மூடிய வளைவு மற்றும் பிரிவு $-1\le x\le 1$.

Or

(b) Evaluate $\int_c \frac{e^z}{z^2+4}\,dz$ where C is positively oriented circle $|z-i|=2$.

$\int_c \frac{e^z}{z^2+4}\,dz$ -ஐ மதிப்பீடு, C என்பது நேர்மறை சார்ந்த வட்டம் $|z-i|=2$.